

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

И. о. проректора по УР

М. Х. Чанкаев

«30» апреля 2025 г., протокол № 8

Рабочая программа дисциплины

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

(наименование дисциплины (модуля))

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(шифр, название направления)

направленность (профиль):

«Системное программирование и компьютерные технологии»

Квалификация выпускника

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Год начала подготовки – 2025

Карачаевск – 2025

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Мамчуев А.М.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с ФГОС I направлению подготовки **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9 с изменениями и дополнениями от 26.11.2020 г., №1456, 8.02.2021 г., №83, на основании учебного плана подготовки бакалавров по направлению **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, направленность (профиль): «**Системное программирование и компьютерные технологии**», локальных актов КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры математического анализа на 2025-2026 учебный год, протокол № 8 от 28 апреля 2025г.

Оглавление

1. Наименование дисциплины (модуля):.....	4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы	4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся.....	5
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.....	6
5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах).....	6
6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).....	10
7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций	10
7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания	11
7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины	11
7.3.1. Перечень вопросов для экзамена	11
7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций	12
7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ	12
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля).....	14
8.1. Основная литература	14
8.2. Дополнительная литература	14
9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)	14
9.1. Общесистемные требования	14
9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины.....	15
9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения	16
9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы	16
10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья	16
11. Лист регистрации изменений	17

1. Наименование дисциплины (модуля):

Функциональный анализ

Целью изучения дисциплины является:

- теоретическое и практическое освоение обучающимися основных разделов функционального анализа;
- освоения основных методов функционального анализа, применяемых в решении профессиональных задач и научно-исследовательской деятельности;
- овладение методами функционального анализа при моделировании с использованием современных математических методов.

Для достижения цели ставятся задачи:

- формирование представлений об основных понятиях и методах функционального анализа;
- сформировать умения доказывать теоремы функционального анализа;
- знать теорию метрических и нормированных пространств, теорию линейных операторов, элементы спектральной теории операторов;
- знать принцип сжатых отображений и уметь его применять для решения различных задач;
- выработать умения использовать теорию линейных функционалов и операторов, решать простейшие интегральные уравнения второго рода;
- показать связи функционального анализа с математическим анализом и другими дисциплинами;
- освоение компетенций в области функционального анализа.

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина Б1.О.20 «Функциональный анализ» относится к блоку – «Блок 1. Дисциплины (модули)», к обязательной части.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 5 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПВО	
Индекс	Б1.О.20
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
Учебная дисциплина «Функциональный анализ» опирается на входные знания, умения и компетенции, полученные по дисциплинам: «Математический анализ I», «Математический анализ II», «Математический анализ III», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» в объеме вузовской программы бакалавриата.	
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
Изучение дисциплины «Функциональный анализ» необходимо для успешного освоения дисциплин формирующих компетенции ОПК-1, ПК-2, а также для прохождения определенных видов практик.	

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Функциональный анализ» направлен на формирование следующих компетенций обучающегося:

Код компе-	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС	Индикаторы достижения сформированности компетенций
------------	--	--

тенций	ВО/ОПВО	
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории, основную терминологию ОПК-1.2. Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты ОПК-1.3. Владеет навыком работы по решению стандартных математических задач и применяет их в профессиональной деятельности.
ПК-2	Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часов.

Объём дисциплины	Всего часов		
	Очная форма обучения	Очно-заочная форма обучения	Заочная форма обучения
Общая трудоемкость дисциплины	108		
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)			
Аудиторная работа (всего):	54		
в том числе:			
лекции	36		
семинары, практические занятия	18		
практикумы	-		
лабораторные работы	-		
Внеаудиторная работа:			
консультация перед экзаменом	-		
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, творческую работу (эссе), рефераты, контрольные работы и др.			
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	54		
Контроль самостоятельной работы	-		

Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет/экзамен)	Экзамен		
--	----------------	--	--

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)
Очная форма обучения

№ п/п	Курс /семестр	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоемкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)			
			Всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа
			108	Лек.	Пр.	Лаб.	
	3/5	<i>Раздел 1. Метрические и линейные нормированные пространства</i>	56	20	12		24
1.		Конечномерные линейные пространства. Базис и размерность.		2			
2.		Линейные пространства. Свойства. Примеры. Линейные и аффинные многообразия.					4
3.		Основные понятия и структуры математического анализа. Метрические пространства. Примеры.		2			
4.		Непрерывные отображения метрических пространств.					4
5.		Метрические пространства. Примеры.			2		
6.		Множества точек. Открытые и замкнутые множества. Сходимость.		2			
7.		Множества точек. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Примеры. Решение задач.			2		
8.		Норма. Линейные нормированные пространства.		2			
9.		Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера.					4
10.		Топологические пространства. Сравнение топологий. Аксиомы Хаусдорфа.		2			
11.		Компактные множества в нормированных пространствах. Непрерывные отображения.		2			
12.		Норма. Аксиомы нормы. Примеры нормированных пространств. Эквивалентность норм.			2		
13.		Ряды в нормированных пространствах.					4
14.		Полные метрические пространства. Примеры. Банаховы пространства.		2			
15.		Пополнение метрических пространств. Пополнение нормированных пространств. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.					4

16.		Евклидовы пространства. Примеры. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства.		2			
17.		Банаховы пространства. Примеры.			2		
18.		Полные ортогональные системы. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.					4
19.		Гильбертовы пространства. Ортогональность. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса-Фишера.		2			
20.		Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортонормальность. Примеры.			2		
21.		Принцип сжимающих отображений и его применения.		2			
22.		Принцип сжимающих отображений и его применения. Примеры. Приближенное решение уравнений.			2		
		Раздел 2. Линейные непрерывные операторы. Линейные непрерывные функционалы	30	10	4		16
23.		Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в нормированных пространствах.		2			
24.		Эквивалентность понятий непрерывности и ограниченности линейных операторов.					2
25.		Непрерывность и ограниченность операторов. Линейные операторы в различных пространствах. Интегральные и дифференциальные операторы.			2		
26.		Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.		2			
27.		Теорема Хана-Банаха и его следствия.					4
28.		Пространство линейных непрерывных операторов. Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейнгауза. Полнота пространства операторов относительно поточечной сходимости.		2			
29.		Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.			2		
30.		Сопряженные пространства. Теорема Рисса об общем виде линейного функционала для пространства непрерывных функций.		2			
31.		Виды сходимости. Слабая сходимост. Слабая сходимост последовательности функционалов. Применение к приближенным вычислениям.					4
32.		Обобщенные функции. Основные понятия.		2			
33.		Действия над обобщенными функциями.					6
		Раздел 3. Элементы спектральной теории операторов	14	4	2		8
34.		Спектр и резольвента оператора. Основные понятия.		2			
35.		Собственные значения и собственные векторы линейных операторов в конечномерных					4

		пространствах.					
36.		Вполне непрерывные операторы и их свойства.		2			
37.		Резольвента как аналитическая оператор-функция.					4
38.		Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Спектр и резольвента оператора. Примеры.			2		
		Раздел 4. Применения методов функционального анализа в прикладных задачах	8	2			6
39.		Применения методов функционального анализа в прикладных задачах.		2			
40.		Применения функционального анализа в теории интегральных уравнений.					6
		ИТОГО:	108	36	18		54

6. Основные формы учебной работы и образовательные технологии, используемые при реализации образовательной программы

Лекционные занятия. Лекция является основной формой учебной работы в вузе, она является наиболее важным средством теоретической подготовки обучающихся. На лекциях рекомендуется деятельность обучающегося в форме активного слушания, т.е. предполагается возможность задавать вопросы на уточнение понимания темы и рекомендуется конспектирование основных положений лекции. Основная дидактическая цель лекции - обеспечение ориентировочной основы для дальнейшего усвоения учебного материала. Лекторами активно используются: лекция-диалог, лекция - визуализация, лекция - презентация. Лекция - беседа, или «диалог с аудиторией», представляет собой непосредственный контакт преподавателя с аудиторией. Ее преимущество состоит в том, что она позволяет привлекать внимание слушателей к наиболее важным вопросам темы, определять содержание и темп изложения учебного материала с учетом особенностей аудитории. Участие обучающихся в лекции – беседе обеспечивается вопросами к аудитории, которые могут быть как элементарными, так и проблемными.

Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его задачи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим. Содержание лекций определяется настоящей рабочей программой дисциплины. Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется соблюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предполагаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам.

Практические занятия. Дисциплины, по которым планируются практические занятия, определяются учебными планами. Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки. Выполнение студентом практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам дисциплин математического и общего естественно-научного, общепрофессионального и профессионального циклов;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива. Методические рекомендации разработаны с целью единого подхода к организации и проведению практических занятий.

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, направленная на выработку у студентов практических умений для изучения последующих дисциплин (модулей) и для решения профессиональных задач. Практическое занятие должно проводиться в учебных кабинетах или специально оборудованных помещениях. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями. Дидактические цели практических занятий: формирование умений (аналитических, проектировочных, конструктивных), необходимых для изучения последующих дисциплин (модулей) и для будущей профессиональной деятельности.

В процессе подготовки к практическим занятиям, обучающимся необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и Интернета, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме. Более глубокому раскрытию вопросов способствует знакомство с дополнительной литературой, рекомендованной преподавателем по каждой теме семинарского или практического занятия, что позволяет обучающимся проявить свою индивидуальность в рамках выступления на данных занятиях, выявить широкий спектр мнений по изучаемой проблеме.

Образовательные технологии. При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения. Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, публичная презентация проекта и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Индикаторы оценивания сформированности компетенций

Компетенции	Зачтено			Не зачтено
	Высокий уровень (отлично) (86-100% баллов)	Средний уровень (хорошо) (71-85% баллов)	Низкий уровень (удовлетворительно) (56-70% баллов)	Ниже порогового уровня (неудовлетворительно) (до 55 % баллов)
ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Знает все положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории, основную терминологию	ОПК-1.1. Знает основные положения и концепции в области математических и естественных наук, базовые теории, основную терминологию	ОПК-1.1. Знает основные положения в области математических и естественных наук, базовые теории, основную терминологию	ОПК-1.1. Знает фрагментарно основные положения в области математических и естественных наук, базовые теории, основную терминологию
	ОПК-1.2. Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала и интерпретировать различные математические объекты	ОПК-1.2. Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала, интерпретировать различные математические объекты	ОПК-1.2. Умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала	ОПК-1.2. Не умеет осуществлять первичный сбор и анализ материала и интерпретировать различные математические объекты
	ОПК-1.3. Владеет навыками работы по решению стандартных математических задач и применения их в профессиональной деятельности	ОПК-1.3. Не достаточно владеет навыками работы по решению стандартных математических задач и применения их в профессиональной деятельности	ОПК-1.3. Владеет навыками работы по решению стандартных математических задач	ОПК-1.3. Не владеет навыками работы по решению стандартных математических задач и применения их в профессиональной деятельности
ПК-2: Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Полностью знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1 Знает основные принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы	ПК-2.1. Знает фрагментарно принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы
	ПК-2.2. Полностью умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2 Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач	ПК-2.2. Не умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач
	ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Необходимо владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Не достаточно владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач	ПК-2.3. Не владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач

7.2. Перевод балльно-рейтинговых показателей оценки качества подготовки обучающихся в отметки традиционной системы оценивания

Порядок функционирования внутренней системы оценки качества подготовки обучающихся и перевод балльно-рейтинговых показателей обучающихся в отметки традиционной системы оценивания проводится в соответствии с положением КЧГУ «Положение о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся», размещенным на сайте Университета по адресу: <https://kchgu.ru/inYE-lokalnye-akty/>

7.3. Типовые контрольные вопросы и задания, необходимые для оценивания сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.3.1. Перечень вопросов для экзамена

1. Линейные пространства. Свойства. Примеры. Линейные и аффинные многообразия. Примеры.
2. Метрические пространства. Аксиомы метрики. Примеры.
3. Полные метрические пространства. Примеры.
4. Множества точек. Сходимость. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Примеры.
5. Непрерывные отображения метрических пространств. Примеры.
6. Норма. Линейные нормированные пространства. Аксиомы нормы. Примеры.
7. Свойства нормированных пространств. Подпространства. Эквивалентность норм. Примеры.
8. Эквивалентные нормы в R^n . Примеры.
9. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. Применения.
10. Банаховы пространства. Примеры.
11. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Примеры.
12. Пополнение метрических пространств. Пополнение нормированных пространств. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств. Примеры.
13. Топологические пространства. Примеры. Сравнение топологий. Аксиомы Хаусдорфа. Способы задания топологии в пространстве.
14. Принцип сжимающих отображений и его применения. Приближенное решение уравнений. Примеры.
15. Метод последовательных приближений для системы линейных алгебраических уравнений. Примеры.
16. Евклидовы пространства. Примеры. Теорема Рисса-Фишера.
17. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры.
18. Гильбертовы пространства. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы. Примеры.
19. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в нормированных пространствах. Примеры.
20. Ряды линейных операторов в банаховом пространстве. Определение функций e^A , $\cos A$, $\sin A$ для линейных непрерывных операторов. Примеры.
21. Пространство линейных операторов. Норма оператора. Теорема Банаха-Штейнгауза. Примеры.
22. Линейные операторы в различных пространствах. Интегральные и дифференциальные операторы. Примеры.
23. Сильная и равномерная сходимость линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза о сильной сходимости. Применения.
24. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Примеры.

25. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха. Примеры.
26. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах и в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса. Примеры.
27. Виды сходимости. Слабая сходимость. Слабая сходимость последовательности функционалов. Применение к приближенным вычислениям. Примеры.
28. Сопряженные пространства. Виды сходимости. Слабая сходимость.
29. Сопряженные и самосопряженные операторы.
30. Нормально разрешимые операторы. Нетеровы и фредгольмовы операторы.
31. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов. Примеры.
32. Интегральный оператор Фредгольма. Задача на собственные значения.
33. Обратные операторы. Свойства. Операторы, зависящие от параметра. Примеры.
34. Спектр и резольвента оператора. Спектральный радиус.
35. Резольвента как аналитическая оператор-функция. Примеры.
36. Вполне непрерывные операторы. Их свойства. Вполне непрерывность интегрального оператора в пространстве $C[a, b]$. Примеры.
37. Интегральные уравнения Фредгольма. Примеры.
38. Линейные уравнения 2-го рода. Теория Рисса-Шаудера. Примеры.

7.3.2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций

7.3.3. Оценочные материалы. Темы к докладам и рефератам. Варианты контрольных работ

Раздел 1. Метрические и линейные нормированные пространства.

1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов.
2. Линейные и аффинные многообразия. Примеры. Изоморфизм.
3. Бесконечномерные линейные пространства.
4. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера.
5. Свойства нормированных пространств. Эквивалентность норм. Ряды в нормированных и банаховых пространствах.
6. Евклидовы пространства. Примеры. Теорема Рисса-Фишера.
7. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры пространств со скалярным произведением.
8. Банаховы пространства. Фундаментальные последовательности. Примеры. Полные метрические пространства. Примеры.
9. Пополнение метрических пространств. Пополнение нормированных пространств. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.
10. Гильбертовы пространства. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы.
11. Принцип сжимающих отображений и его применения. Приближенное решение уравнений. Метод последовательных приближений для системы линейных алгебраических уравнений.
12. Топологические пространства, основные определения. Сравнение топологий. Сепарабельные топологические пространства, основные определения.
13. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.
14. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса-Фишера.

Раздел 2. Линейные непрерывные операторы. Линейные непрерывные функционалы.

1. Линейные операторы в различных пространствах. Интегральные и дифференциальные операторы.
2. Сопряженные и самосопряженные операторы.

3. Компактные и бикомпактные множества.
4. Сильная и равномерная сходимость линейных операторов. Принцип равномерной ограниченности.
5. Теорема Банаха-Штейнгауза о сильной сходимости. Применения.
6. Линейные уравнения. Приближенные решения.
7. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах и в гильбертовом пространстве.
8. Теорема Рисса. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Норма функционала.
9. Сопряженные пространства. Виды сходимости. Слабая сходимость. Слабая сходимость последовательности функционалов.

Раздел 3. Элементы спектральной теории операторов.

1. Интегральный оператор Фредгольма. Задача на собственные значения.
2. Спектр и резольвента оператора. Спектральный радиус.
3. Вполне непрерывные операторы. Их свойства. Вполне непрерывность интегрального оператора в пространстве $C[a, b]$. Спектр вполне непрерывного оператора.
4. Определение функций e^A , $\cos A$, $\sin A$ для линейных непрерывных операторов. Резольвента как аналитическая оператор-функция.
5. Решение задачи Коши в банаховом пространстве. Обратный оператор, условия его существования.

Раздел 4. Применения методов функционального анализа в прикладных задачах.

1. Интегральные уравнения Фредгольма.
2. Линейные уравнения 2-го рода.

Варианты контрольных работ.

Контрольная работа №1

Вариант № 0

1. Выполняются ли аксиомы метрики в R^3 для функции $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq 3} k^3 |x_k - y_k|^{1/4}$.
2. Найти расстояние между функциями $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = 2x + 3$, в метриках пространств: $C[0; 3,5]$ и $C_1[0; 3,5]$.
3. Проверить, что функция $f(x) = 4x - 4x^2$, отображает промежуток $[0; 1]$ в себя. Является ли это отображение сжимающим?
4. Проверить сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$, к функции $f(x) = 0$ в пространстве $C_1[0; 1]$.

Контрольная работа №2

Вариант № 0

1. Проверить задают ли норму на числовой прямой функции:
а) \sqrt{x} ; б) x^2 .
2. Доказать, что предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством с нормой: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.
3. Показать, что функционал $\delta(f) = f(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ – линейный функционал в $C[a; b]$ и найти его норму.
4. В пространстве $C[a; b]$ задан оператор $F(y) = xy(x)$, принимающий значения в том же пространстве. Доказать, что этот оператор линейный, и найти его норму.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

8.1. Основная литература

1. Белоусова, Е. П. Функциональный анализ : методические указания / Е. П. Белоусова, Т. И. Смагина. — Воронеж : ВГУ, 2016. — 25 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/165275> - Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Борисов, В. Г. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Г. Борисов. — Кемерово : КемГУ, 2023 — Часть 1 : Функциональные пространства — 2023. — 104 с. — ISBN 978-5-8353-3002-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/392162> - Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Борисов, В. Г. Функциональный анализ : учебное пособие / В. Г. Борисов. — Кемерово : КемГУ, 2023 — Часть 2 : Линейные операторы — 2023. — 90 с. — ISBN 978-5-8353-3003-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/392165> - Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учеб. пособие / Т. А. Леонтьева, А. В. Домрина — М.: ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Магистратура). - ISBN 978-5-16-006429-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/917972> - Режим доступа: по подписке.
5. Нелюхин, С. А. Элементы функционального анализа: линейные операторы, уравнения в банаховых пространствах : учебное пособие / С. А. Нелюхин, А. И. Сюсюкалов, Е. А. Сюсюкалова. — Рязань : РГРТУ, 2019. — 84 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168260> - Режим доступа: для авториз. пользователей. - Текст: электронный.

8.2. Дополнительная литература

1. Кириллов, К. А. Функциональный анализ : учебное пособие / К. А. Кириллов, С. В. Кириллова, А. А. Кытманов. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-7638-4668-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/2091397> - Режим доступа: по подписке.
2. Ревина, С. В. Функциональный анализ в примерах и задачах: учеб. пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов-на-Дону:Издательство ЮФУ, 2009. - 120 с. ISBN 978-5-9275-0683-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/556115> - Режим доступа: по подписке.
3. Сухинов, А. И. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / А.И. Сухинов, И.П. Фирсов. - Ростов н/Д: Издательство ЮФУ, 2009. - 189 с. ISBN 978-5-9275-0671-2. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/549858> - Режим доступа: по подписке.
4. Мамчуев А.М. Элементы функционального анализа. Методическое пособие. КЧГУ, 2019.

9. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)

9.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: <http://kchgu.ru>.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: <https://do.kchgu.ru>.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 249 эбс от 14.05.2025 г. Электронный адрес: https://znanium.com	от 14.05.2025г. до 14.05.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 10 от 11.02.2025 г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	от 11.02.2025г. до 11.02.2026г.
2025-2026 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22.02.2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2025-2026 учебный год	Электронный ресурс Polpred.com Обзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

9.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и

промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащённости аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащённости образовательного процесса по адресу: <https://kchgu.ru/sveden/objects/>

9.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения

- Microsoft Windows (Лицензия № 60290784), бессрочная
- Microsoft Office (Лицензия № 60127446), бессрочная
- ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
- CalculateLinux (внесён в ЕРПП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
- Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная
- Kaspersky Endpoint Security (Лицензия № 280E-210210-093403-420-2061), с 25.01.2023 г. по 03.03.2025 г.
- Kaspersky Endpoint Security. Договор №0379400000325000001/1 от 28.02.2025г. Срок действия лицензии с 27.02.2025г. по 07.03.2027г.

9.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» - <https://edu.ru/documents/>
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru/>
3. Базы данных Scopus издательства Elsevier <http://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - <http://fgosvo.ru>.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – <http://edu.ru>.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – <http://school-collection.edu.ru>.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – <http://window.edu.ru>.

10. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «[Положением об обучении лиц с ОВЗ в КЧГУ](#)», размещенным на сайте Университета по адресу: <http://kchgu.ru>.

11. Лист регистрации изменений

Изменение	Дата и номер протокола ученого совета факультета/ института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений в ОПВО	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения в ОПВО